Л 14. Некоторые приложения определенных интегралов.

С помощью определенных интегралов можно находить площади плоских фигур при различных способах задания границ области, длины дуг кривых, объемы тел и площади поверхностей вращения.

1. Площадь в декартовых координатах. Выше было показано, что в случае если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке, $[a,b]$ то $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь соответствующей криволинейной трапеции $S(G)$. Если же $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox и $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Несложно проверить, что этот интеграл выражает площадь этой трапеции со знаком «минус». В общем случае, если функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен сумме площадей частей криволинейной трапеции, лежащих выше оси Ox, взятых со знаком «плюс» и частей, лежащих ниже оси со Ox, взятых знаком «минус».

Если график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ задан с помощью параметрических функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

где $y(t) \geq 0$ непрерывна, а $x(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле $S(G) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

В этом можно убедиться, сделав в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ замену переменной $x = x(t)$.

Пример 1. Найдем площадь эллипса с полуосями a и b. Верхняя половина эллипса представляет из себя криволинейную трапецию, где кривая задается с помощью параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Поскольку значение $t = 0$ соответствует $x = a$, а $t = \pi$ - значению $x = -a$, то площадь всего эллипса есть

$$S(G) = 2\int_\pi^0 b\sin t(a\cos t)'dt = 2ab\int_0^\pi \sin^2 tdt = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt = ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= ab\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - ab\cdot 0 = \pi ab.$$

2. Площадь в полярных координатах. Некоторые кривые линии на плоскости удобно описывать в системе координат, которая называется полярной.

Пусть на плоскости выбрана декартова система координат. Положительную полуось Ox будем называть полярной осью, а точку O полюсом. Пусть M - некоторая точка на плоскости.

Расстояние от точки M до O будем называть полярным радиусом ρ этой точки. Угол между полярной осью и вектором $\overline{OM}$ обозначим через φ. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M.

На числа ρ и φ накладываются следующие естественные ограничения: $\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Связь между декартовыми и полярными координатами точки M осуществляется с помощью соотношений $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Область G на плоскости, ограниченную лучами исходящими из начала координат, $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_1 < \varphi_2$ и графиком непрерывной в отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$ неотрицательной функции $\rho = f(\varphi)$, будем называть криволинейным треугольником

Разбив отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$ на n частей и заменив на каждом участке $\Delta\varphi_i$ площадь криволинейного треугольника на площадь кругового сектора радиуса $f(c_i)$ с углом $\Delta\varphi_i$ получим приближенную формулу $S(G) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(c_i)\Delta\varphi_i$.

Здесь записанная сумма является интегральной суммой для функции $\rho = \frac{1}{2} f^2(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Перейдя в последнем соотношении к пределу при максимальном $\Delta\varphi_i \to 0$, получим точное выражение для площади криволинейного треугольника:

$$S(G) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 2. Найдем площадь области, ограниченной линией $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли.

Область интегрирования находится из условия $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Достаточно найти площадь криволинейного треугольника для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, которая составляет четверть площади всей области

$$S(G) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \sin\frac{\pi}{2} - a^2 \sin 0 = a^2.$$

3. Нахождение длины дуги кривой. Пусть кривая L с концами A и B на плоскости задана с помощью графика непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, где $x\in[a,b]$. Разобьем эту кривую на n частей точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, где M_i имеет координаты (x_i, y_i), $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$.

Длину вписанной в L ломаной с вершинами в выбранных точках обозначим через I_n:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\,.$$

Определение. Длиной кривой L называется предел суммы длин ломанных, вписанных в эту кривую, при максимальном Δx_i, стремящемся к нулю. Будем обозначать ее через $I(L)$.

$$I(L) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n\,.$$

Кривая, имеющая длину (если указанный предел существует), называется спрямляемой.

Теорема. График непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ спрямляем, и его длина находится по формуле $I(L) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Следствие 1. Пусть кривая L на плоскости задана с помощью непрерывно дифференцируемых параметрических функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Тогда эта кривая спрямляема, и ее длина находится по соответствующей формуле.

Следствие 2. Пусть кривая L в полярных координатах задана с помощью непрерывно дифференцируемой неотрицательной функции $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Тогда эта кривая спрямляема и ее длина равна $I(L) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,d\varphi$.

Пример 3. Найдем длину кардиоиды, задаваемой уравнением $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$. Поскольку $a(1+\cos\varphi)\ge 0$ для всех φ, то

$$\mathrm{I(L)} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$$

$$= 2a\left(\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right) = 4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} - \sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 4a(1+1) = 8a\,.$$

4. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенных интегралов. Пусть в пространстве имеется тело T и ось Ox. Обозначим площадь области, полученной в результате сечения T плоскостью, проходящей через точку x на оси Ox перпендикулярно ей, через $Q(x)$. Пусть проекция тела T на Ox есть отрезок $[a,b]$, т.е. функция $y = Q(x)$ определена на этом отрезке. Будем считать, что $Q(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n т частей точками x_i, и на каждом промежутке $[x_{i-1},\ x_i]$ заменим объем тела на объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и площадью основания $Q(c_i)$, где $c_i \in (x_{i-1},\ x_i)$. В результате получим приближенную формулу для объема Т

$$V(T) \approx \sum_{i=1}^{n} Q(c_i)\Delta x_i.$$

Перейдя в этом соотношении к пределу при максимальном $\Delta x_i \to 0$ получим точное значение объема Т

$$V(T) = \int_a^b Q(x)dx$$

В случае, если тело Т образовано вращением криволинейной трапеции, задаваемой непрерывной функцией $y = f(x)$ на $[a,b]$ вокруг Ox, площадь круга $Q(x)$ находится по формуле $Q(x) = \pi f(x)^2$, т.к $f(x)$ есть радиус этого круга. Объем указанного тела вращения определяется соотношением

$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найдем объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции задаваемой графиком функции $y = x^2$, где $x \in [0,1]$ вокруг оси Ox. Используя полученную формулу, получаем $\mathrm{V(T)} = \pi\int_0^1 (\mathrm{x}^2)^2 \mathrm{dx} = \pi\frac{\mathrm{x}^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$

Замечание. Пусть рассмотренная выше криволинейная трапеция при $a,b \ge 0$ и $f(x) \ge 0$ вращается вокруг оси Oy. Можно доказать, что объем получившегося тела находится по формуле $V(T) = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

5. Нахождение площади поверхности вращения. Пусть график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, где $x \in [a,b]$ и $f(x) \ge 0$, вращается вокруг оси Ox. Можно доказать, что площадь получившейся поверхности вращения H находится по формуле

$$S(H) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$